

Caracterización de señales Sub-Nyquist con modulación analógica, basada en la distribución de los valores singulares*

Herman Hamilton Guerrero Chapal**✉
Evelio Astaiza Hoyos***

Cómo citar este artículo / To reference this article / Para citar este artigo: Guerrero, H. y Astaiza, E. (2017). Caracterización de señales Sub-Nyquist con modulación analógica, basada en la distribución de los valores singulares. *Revista UNIMAR*, 35(2), 221-236.

Fecha de recepción: 01 de noviembre de 2016
Fecha de revisión: 03 de febrero de 2017
Fecha de aprobación: 24 de abril de 2017

RESUMEN

En este trabajo se muestra las distribuciones de probabilidad que presentan los valores singulares, obtenidos de la matriz de autocorrelación de las muestras de señales continuas, adquiridas con muestreo Sub-Nyquist random demodulator. Los resultados provienen de un proceso experimental a nivel de simulación desarrollado en Matlab®. El proceso de simulación parte de la experimentación con tonos senoidales puros, continuando con señales con modulación am, y finalizando con modulación en frecuencia. Estas señales se encuentran inmersas en ruido blanco aditivo gaussiano, con el fin de acercarse a la realidad.

Palabras clave: Autocorrelación, AWGN, espectro, frecuencia de muestreo, radio cognitiva, Sub-Nyquist, valores singulares.

Characterization of Sub-Nyquist signals with analog modulation, based on the distribution of singular values

ABSTRACT

The work evidences the probability distributions that present the singular values, obtained from the autocorrelation matrix of the continuous signal samples, acquired with Sub-Nyquist random demodulator sampling. The results come from an experimental process at simulation level developed in Matlab®. The simulation process starts from the experimentation with pure sinusoidal tones, continuing with signals with a.m. modulation, and ending with frequency modulation. These signals are immersed in Gaussian additive white noise, in order to get closer to reality.

Key words: Autocorrelation, AWGN, spectrum, sampling frequency, cognitive radio, Sub-Nyquist, singular values.

* Artículo Resultado de Investigación. Derivado del proyecto de investigación titulado: "Caracterización de señales Sub-Nyquist con modulación análoga, basada en la distribución de los valores singulares" (Grupo GRIM Unimar) y de la tesis de maestría titulada "Sensado de Espectro de Banda Ancha basado en la Distribución de los Valores Propios y/o Valores Singulares de la Señal Recibida utilizando Muestreo Sub-Nyquist", Universidad del Cauca.

**✉ Candidato a Magíster en Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad del Cauca; Ingeniero Electrónico, Universidad de Nariño. Docente Facultad de Ingeniería, Universidad Mariana. Integrante del Grupo de Investigación GRIM, Universidad Mariana, San Juan de Pasto, Nariño, Colombia. Correo electrónico: hhguerrero@umariana.edu.co

*** Candidato a Doctor en Ciencias de la Electrónica, Universidad del Cauca; Magíster en Ingeniería Área Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad del Cauca; Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad del Cauca. Docente Facultad de Ingeniería, Universidad del Quindío. Integrante del Grupo de Investigación GITUQ, Universidad del Quindío, Colombia. Correo electrónico: eastaiza@uniquindio.edu.co



Caracterização de sinais Sub-Nyquist com modulação analógica, com base na distribuição de valores singulares

RESUMO

O trabalho evidencia as distribuições de probabilidade que apresentam os valores singulares, obtidos a partir da matriz de autocorrelação das amostras de sinal contínuo, adquiridas com amostragem de modulador aleatório Sub-Nyquist. Os resultados provêm de um processo experimental no nível de simulação desenvolvido no Matlab®. O processo de simulação começa a partir da experimentação com tons sinusoidais puros, continuando com sinais com modulação am e terminando com modulação de frequência. Esses sinais estão imersos no ruído branco aditivo gaussiano, para se aproximar da realidade.

Palavras-chave: Autocorrelação, AWGN, espectro, frequência de amostragem, radio cognitiva, Sub-Nyquist, valores singulares.

1. Introducción

Dentro de las tecnologías de comunicaciones inalámbricas, la radio cognitiva se vislumbra como la futura evolución de los sistemas de telecomunicaciones de radio frecuencia (Hattab e Ibnkahla, 2014). Uno de los principales puntos para la implementación de esta tecnología es el reconocimiento de las frecuencias libres, proceso conocido como 'Sensado de espectro' (Subedar y Birajdar, 2011). Estos cuatro autores sostienen que existen diversas técnicas de este proceso, la mayoría de ellas dentro del ámbito del muestreo Nyquist. Sin embargo, la implementación práctica de algunas de ellas (basadas en el teorema de muestreo), presenta el inconveniente inherente a la alta tasa de muestreo, necesaria para el sensado de las frecuencias altas del espectro (Guerrero, 2015). Es ahí, donde las técnicas Sub-Nyquist surgen como una alternativa para la futura implementación práctica de la radio cognitiva.

Comprender el comportamiento de las señales adquiridas con muestreo Sub-Nyquist ofrece herramientas analíticas para la formulación de nuevas técnicas o métodos de sensado de espectro (Guerrero, 2015). Teniendo en cuenta lo anterior, surge la siguiente inquietud: ¿Es posible caracterizar señales con modulación analógica, basada en la distribución de valores propios y/o valores singulares, con el fin de establecer un punto de partida para futuras investigaciones?

2. Metodología

Los resultados presentados en este artículo fueron obtenidos en experimentos a nivel de simulación, en los cuales se implementó algoritmos iterativos desarrollados en MatLab®. Las etapas que componen dichos algoritmos son el modelado de la señal, muestreo de la señal, descomposición en valores singulares, y distribución de probabilidad, etapas descritas en las siguientes secciones.

3. Resultados y Discusión

Caracterización de señales sub-nyquist.

Para identificar las características presentes en las muestras de las señales Sub-nyquist, se realizó el procedimiento descrito a continuación:

Modelo de la señal

La primera señal analizada presenta el modelo de la ecuación 1, la cual describe un tono senoidal puro (Figura 1).

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

... donde A es la amplitud máxima, ω es la frecuencia angular, ecuación 2, t el vector temporal y ϕ el desfase en radianes.

$$\omega = 2\pi f = \text{frecuencia en hertz} \quad (2)$$

Sin embargo, no siempre se obtiene señales de este tipo en los ambientes relacionados con telecomunicaciones inalámbricas; son más comunes señales perturbadas o inmersas en ruido de diferente tipo (Shannon, 1984); por este motivo, el modelo de la señal constituida por un tono senoidal puro, en presencia de ruido aditivo blanco gaussiano (Figura 2), el cual será caracterizado, se presenta en la ecuación 3.

$$y(t) = x(t) + awgn \quad (3)$$

... donde $x(t)$ es la señal descrita en la ecuación 1, y AWGN es un ruido con distribución normal, con media cero y varianza 1, ecuación 4:

$$awgn \sim N(0,1) \quad (4)$$

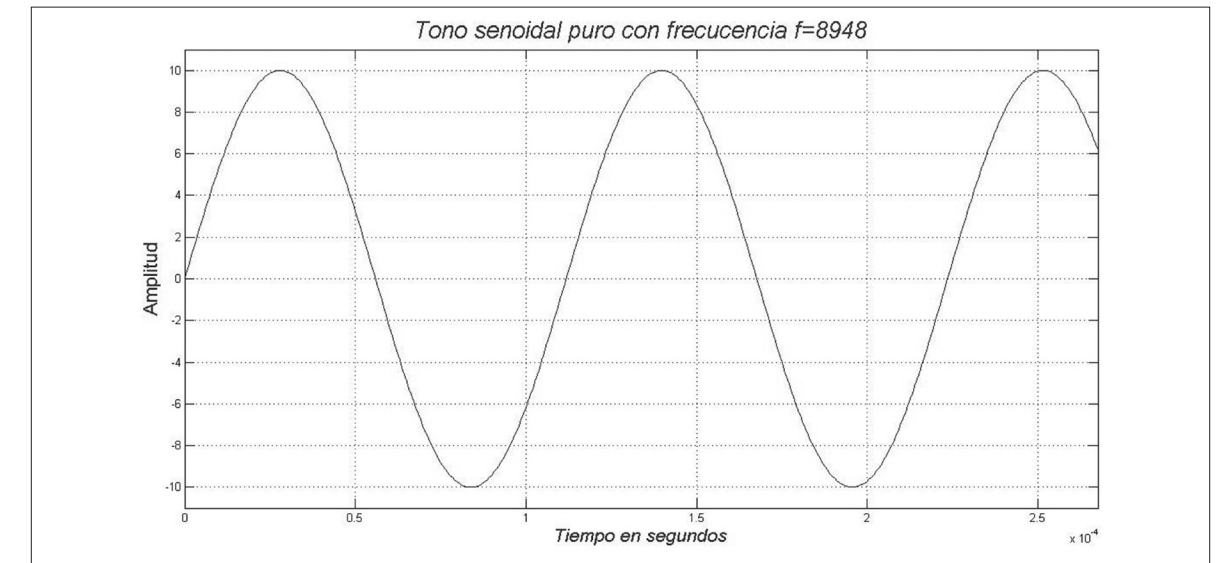


Figura 1. Tono senoidal puro.

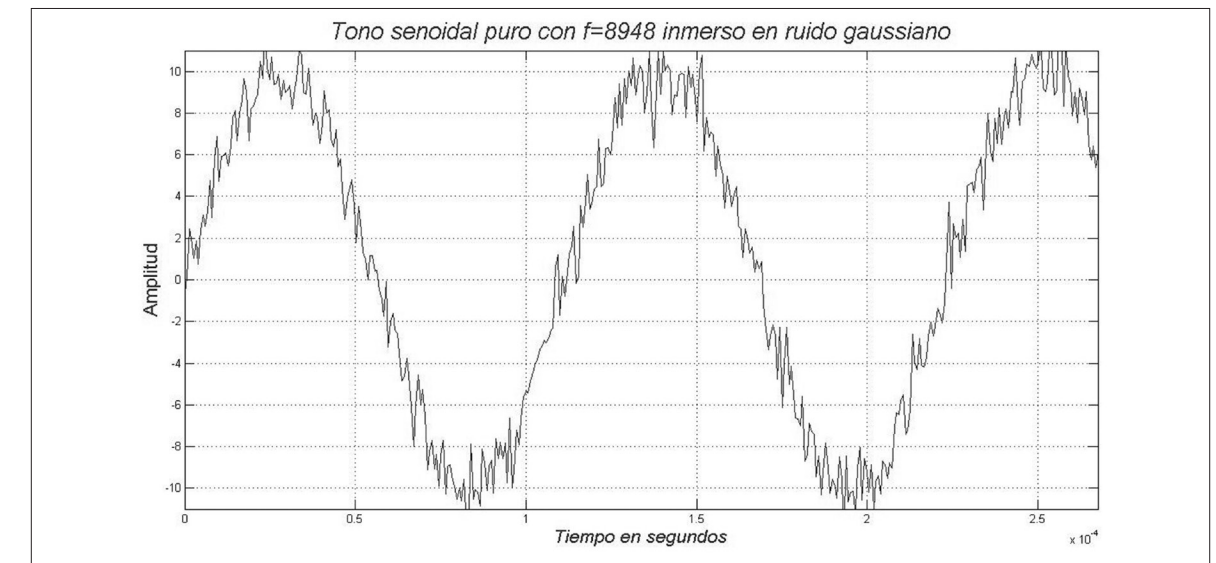


Figura 2. Tono senoidal puro inmerso en ruido.

La segunda señal a caracterizar presenta una modulación en amplitud AM de doble banda lateral (Tomasi, 2003), en presencia de ruido AWGN. La ecuación 5 muestra el modelo matemático que describe dicha señal:

$$y(t) = x_m(t) \times x_c(t) + awgn \quad (5)$$

... donde x_m es la señal moduladora con frecuencia f_m , y x_c es la señal portadora con frecuencia f_c , ambas señales descritas por la ecuación 1; las frecuencias de la señales presentan la relación descrita por la

ecuación 6. Las Figuras 3 y 4 muestran la representación gráfica de una señal am de doble banda lateral.

$$f_c \cong 100f_m \quad (6)$$

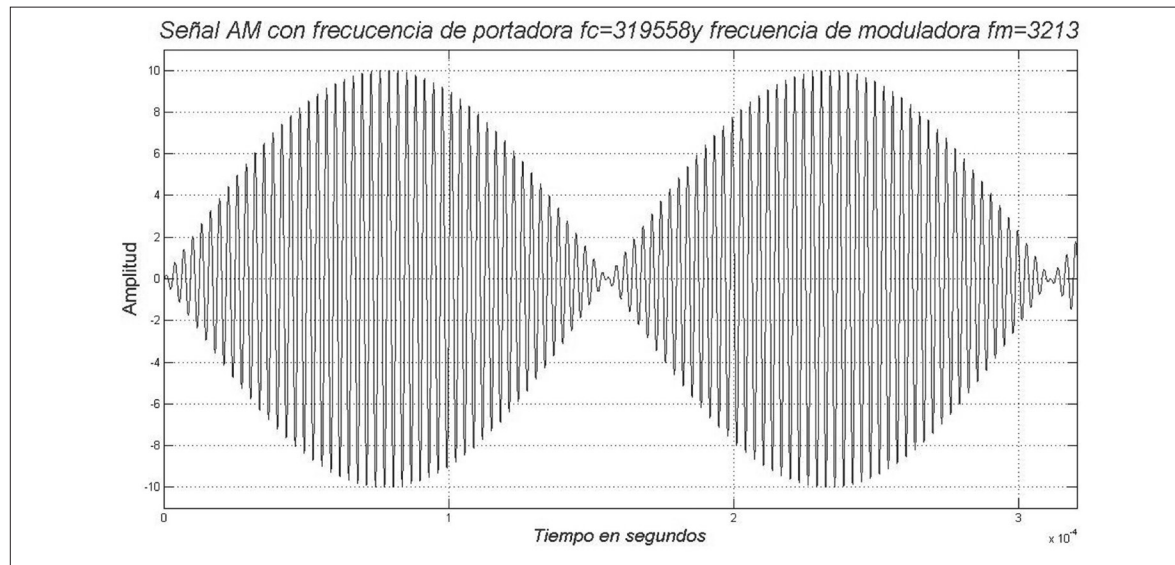


Figura 3. Señal con modulación AM de doble banda lateral.

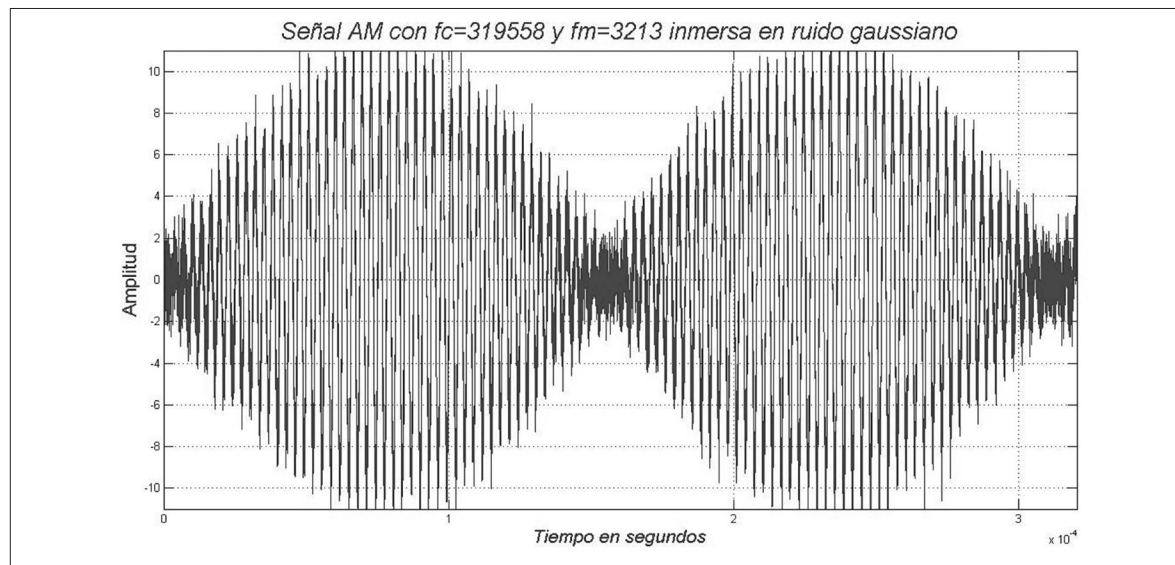


Figura 4. Señal con modulación AM de doble banda lateral inmersa en ruido.

La última señal a caracterizar tiene una modulación en frecuencia, FM (Tomasi, 2003), en presencia de ruido AWGN. Esta señal presenta el modelo matemático descrito en la ecuación 6:

$$y(t) = A \cos(\omega_c t + m \sin(\omega_m t)) + awgn \quad (6)$$

...donde ω_c y ω_m son las frecuencias angulares de la portadora y m de la moduladora, respectivamente, y es el índice de modulación. En la ecuación 7, K_1 es la sensibilidad a la desviación (Tomasi, 2003), y A_m es la amplitud de la señal moduladora.

$$m = \frac{k_1 A_m}{\omega_m} \quad (7)$$

En las Figuras 5 y 6 se puede observar la representación gráfica de la señal:

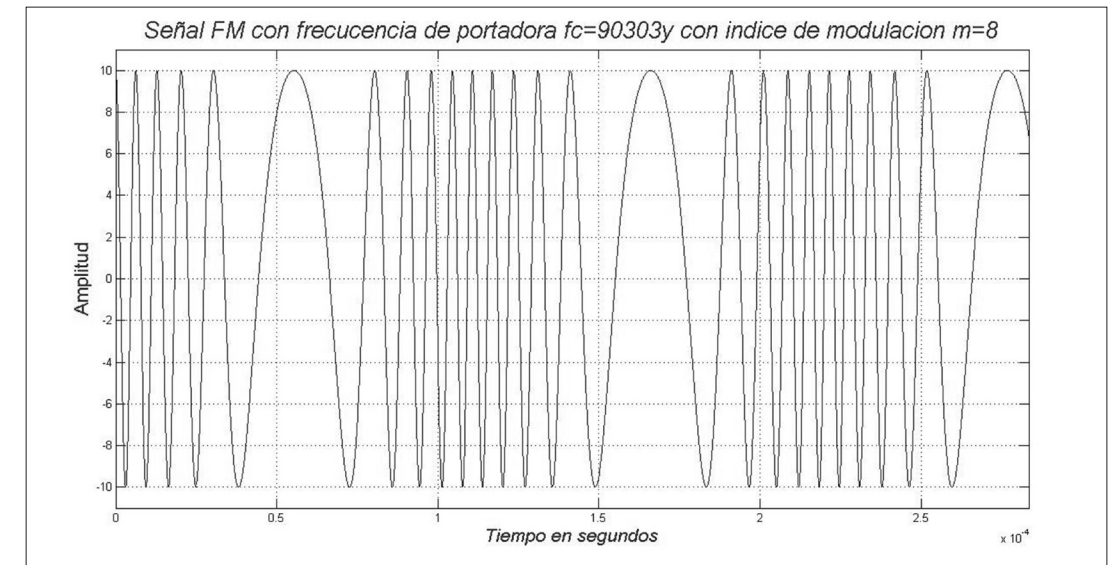


Figura 5. Señal con modulación FM.

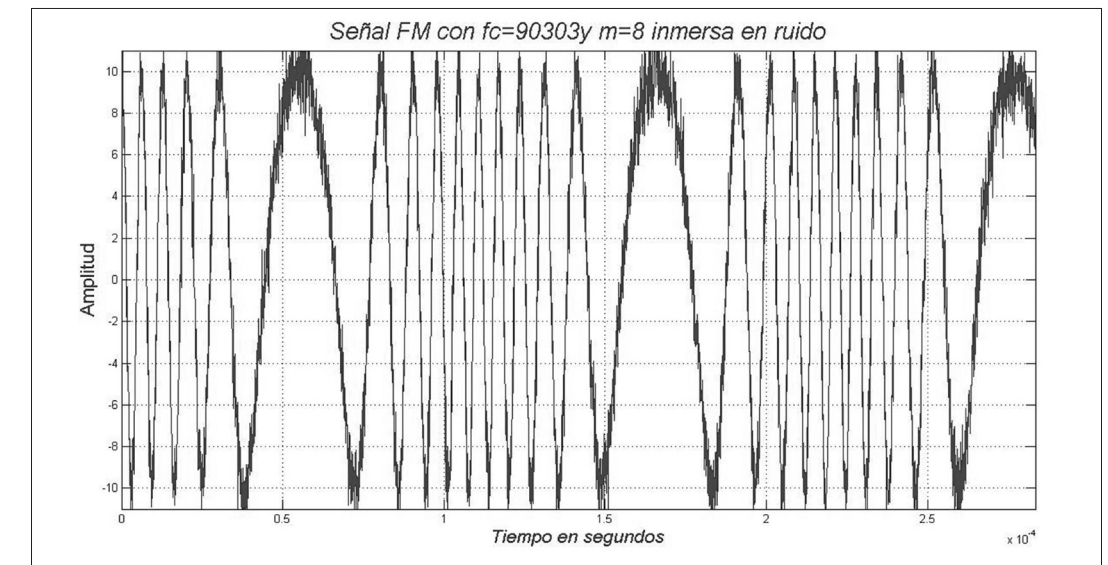


Figura 6. Señal con modulación FM inmersa en ruido.

Muestreo de la señal

Uno de los principios básicos para la digitalización de señales analógicas es el teorema de muestreo (Shannon, 1984), (Nyquist, 1928) (Ecuación 8), el cual establece que la frecuencia de muestreo para una señal analógica debe ser mayor o igual al doble de la máxima frecuencia presente en dicha señal, ecuación 8:

$$f_s \geq 2f_c \quad (8)$$

Esto implica que para muestrear una señal cuya frecuencia de portadora (f_c) sea igual a 5 GHz, la frecuencia de muestreo (f_s) debe ser, como mínimo 10 GHz. Es decir, que para la implementación práctica de un sistema con dichas características, es necesario incluir hardware cuya gran complejidad incrementaría los costos.

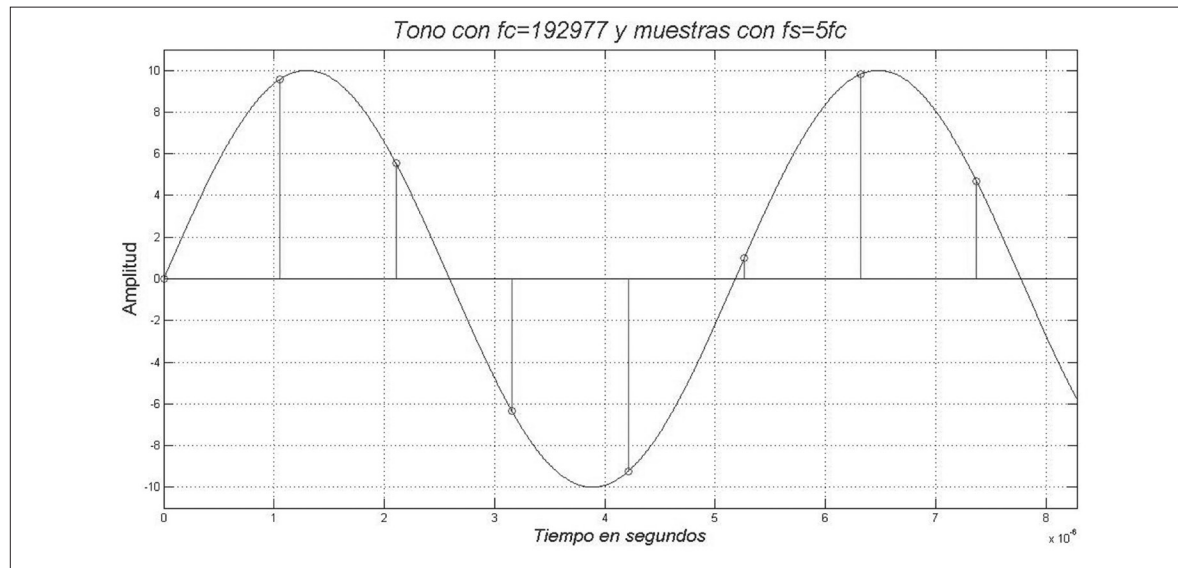


Figura 7. Tono senoidal con muestras obtenidas con frecuencia de muestreo igual a 5 fc.

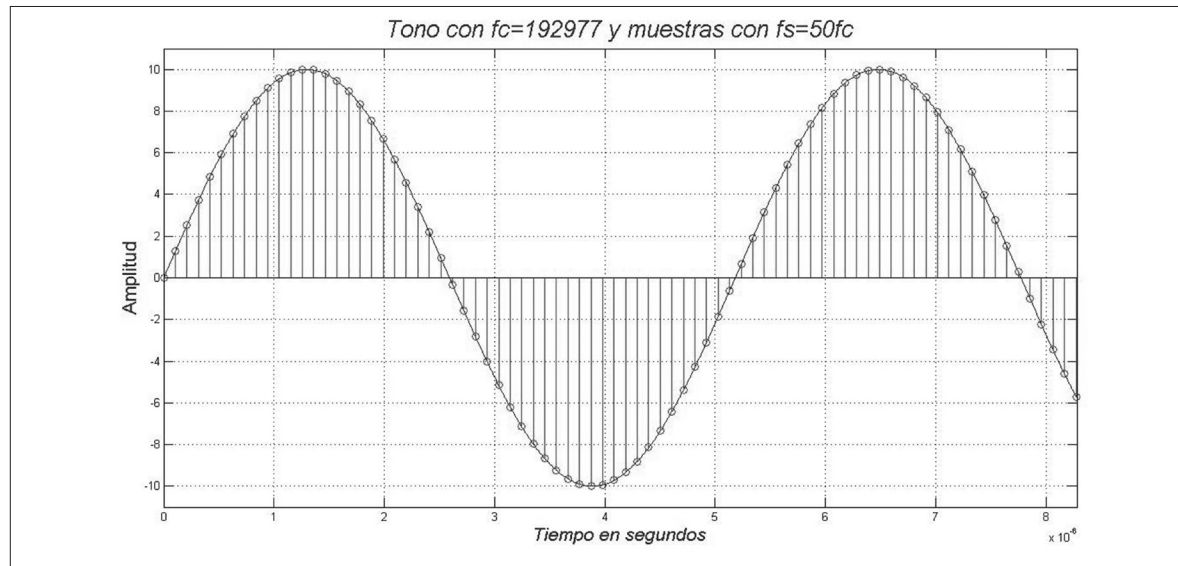


Figura 8. Tono senoidal con muestras obtenidas con frecuencia de muestreo igual a 50 fc.

Teniendo en cuenta el teorema de muestreo (Shannon, 1984), (Nyquist, 1928), la representación digital presenta mayor fidelidad; es decir, se acerca mucho más a la señal real, a medida que se aumenta la frecuencia de muestreo; esto se observa en las Figuras 6 y 7, donde las muestras (rojas) de la señal real (azul) son obtenidas a dos frecuencias de muestreo diferentes.

Si se cumple el teorema de Nyquist (Shannon, 1984), (Nyquist, 1928), es posible la reconstrucción de la señal a partir de sus muestras, y más importante aún,

en el ámbito de las telecomunicaciones, es posible conocer la frecuencia central y su espectro (Moron, 2011).

El problema que presenta el muestreo sub-Nyquist, o sea, un muestreo con una frecuencia menor a la establecida por el teorema de muestreo, ecuación 9, es el fenómeno de aliasing (Bracewell, 2000), mediante el cual aparece una frecuencia central y su respectivo espectro, menores a los reales.

$$f_s < 2f_c \quad (9)$$

En la Figura 9 se observa una señal de un tono senoidal puro (azul) con sus muestras (rojo), obtenidas con una frecuencia de muestreo descrita por la ecuación 9.

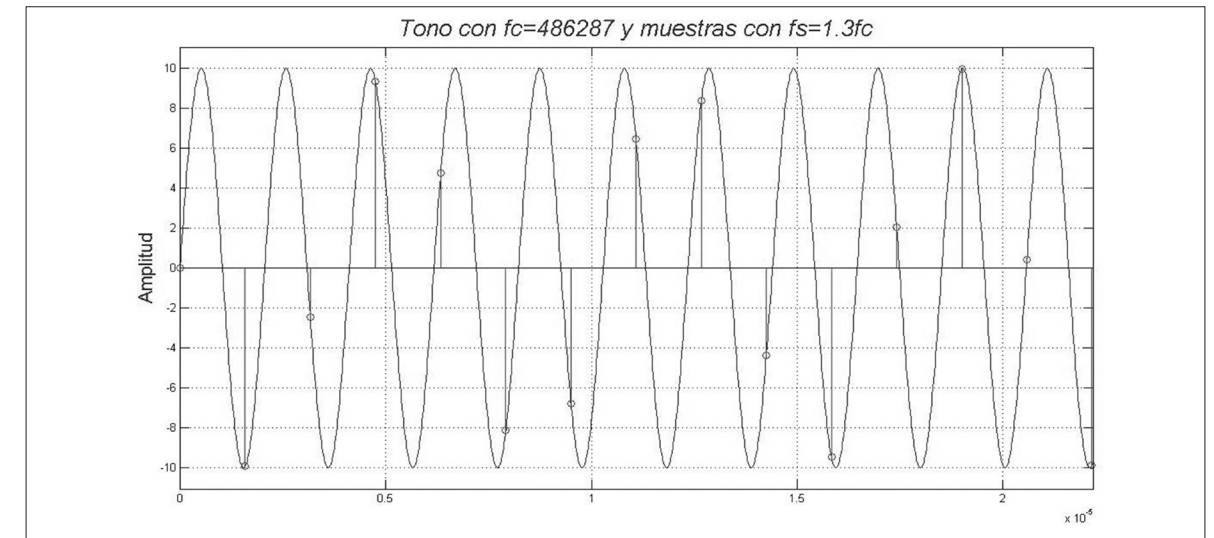


Figura 9. Tono senoidal con muestras obtenidas con frecuencia de muestreo igual a 1.3 fc.

La Figura 10 presenta claramente el espectro real de la señal (izquierda); es decir, aquél obtenido gracias a las muestras adquiridas bajo el teorema de Nyquist, en donde se observa cómo la señal presenta mayor

potencia en la frecuencia central (f_c). En la derecha de la gráfica aparece el 'falso' espectro resultado del submuestreo; éste muestra mayor potencia en una frecuencia central errónea.

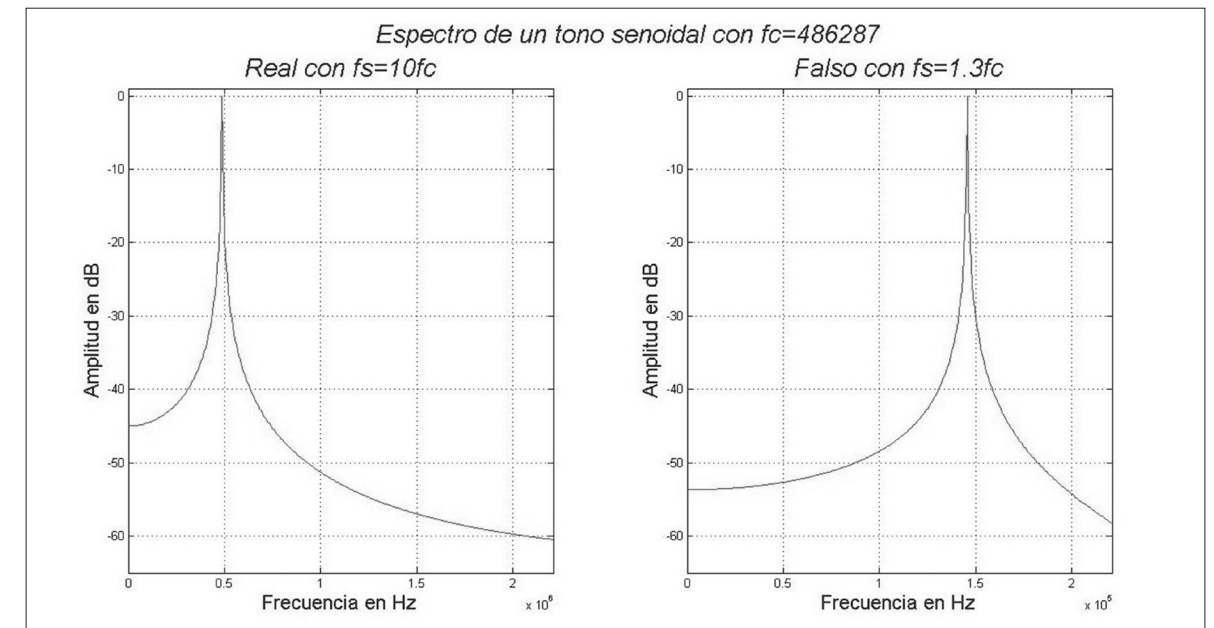


Figura 10. Espectros de un tono senoidal obtenidos con dos tipos de muestreo. Izquierda espectro real con $f_s=10f_c$ (muestreo Nyquist). Derecha espectro falso con $f_s=1.3f_c$ (muestreo sub-Nyquist).

En las Figuras 11 y 12 se observa señales con modulación en amplitud y frecuencia (verde), con sus muestras obtenidas con frecuencia sub-Nyquist (rojo), mientras que en las Figuras 13 y 14 se observa los respectivos espectros, tanto los reales como los obtenidos con el submuestreo.

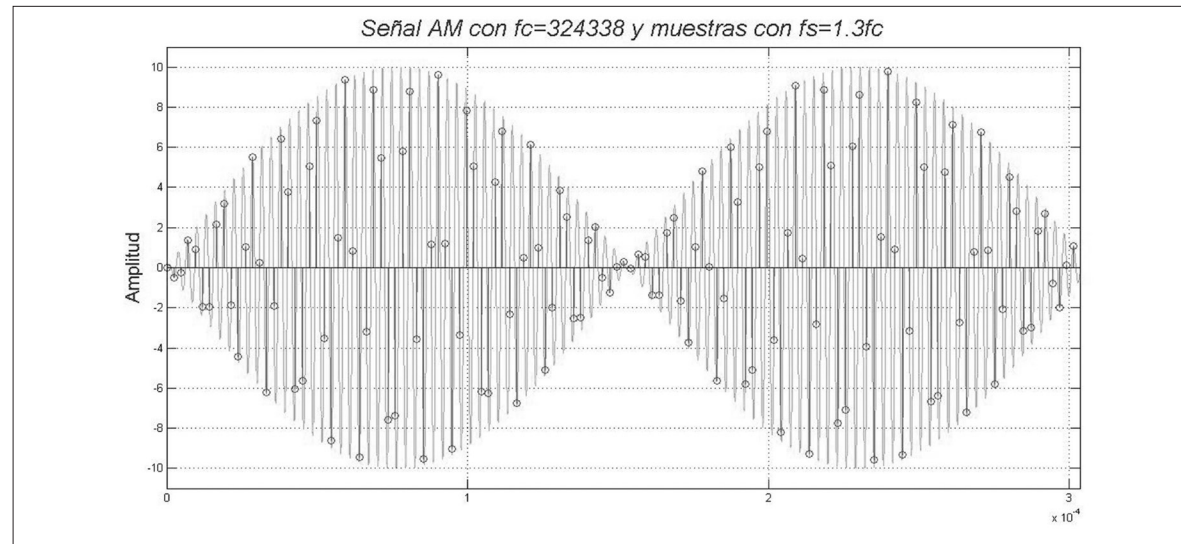


Figura 11. Señal AM con muestras obtenidas con frecuencia de muestreo igual a 1.3 fc.

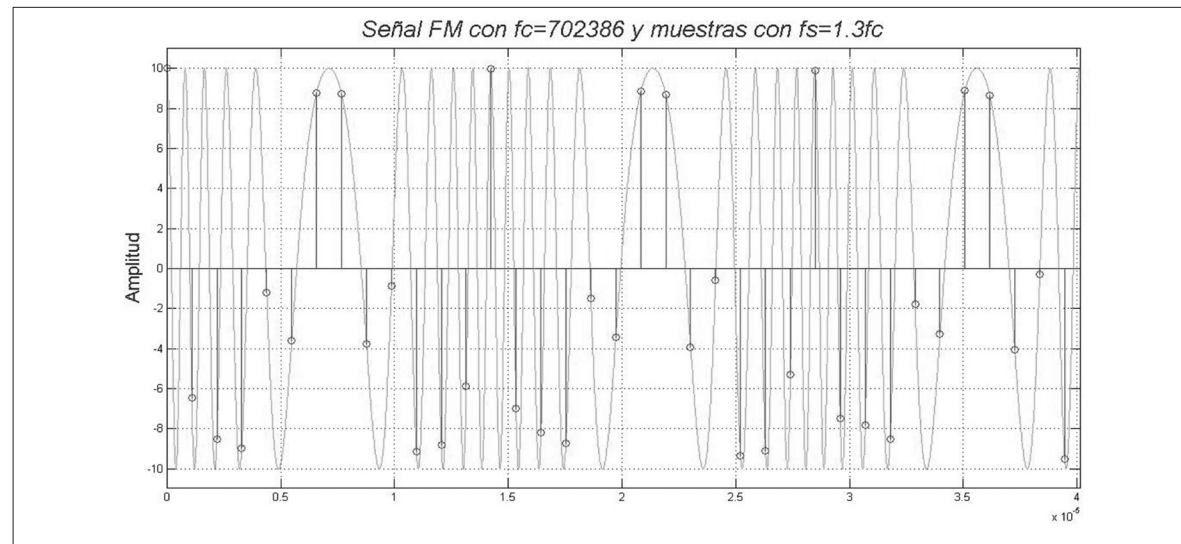


Figura 12. Señal AM con muestras obtenidas con frecuencia de muestreo igual a 1.3 fc.

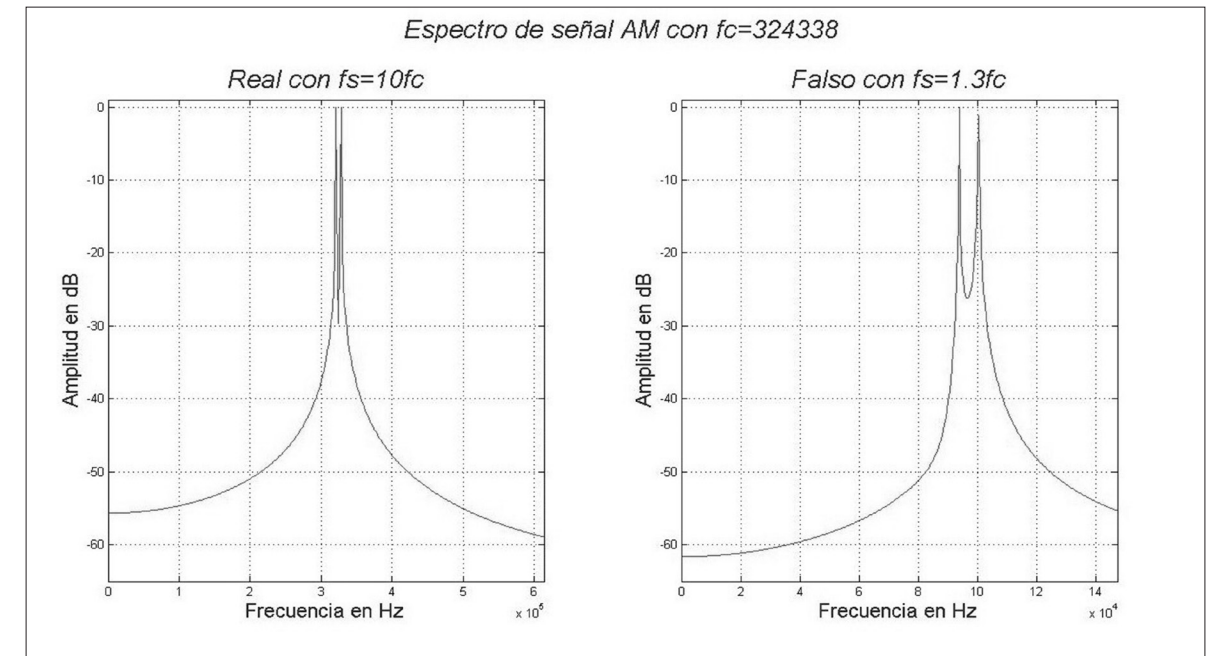


Figura 13. Espectros de una señal AM obtenidos con dos tipos de muestreo. Izquierda, espectro real con $fs=10fc$ (muestreo Nyquist). Derecha, espectro falso con $fs=1.3fc$ (muestreo sub-Nyquist).

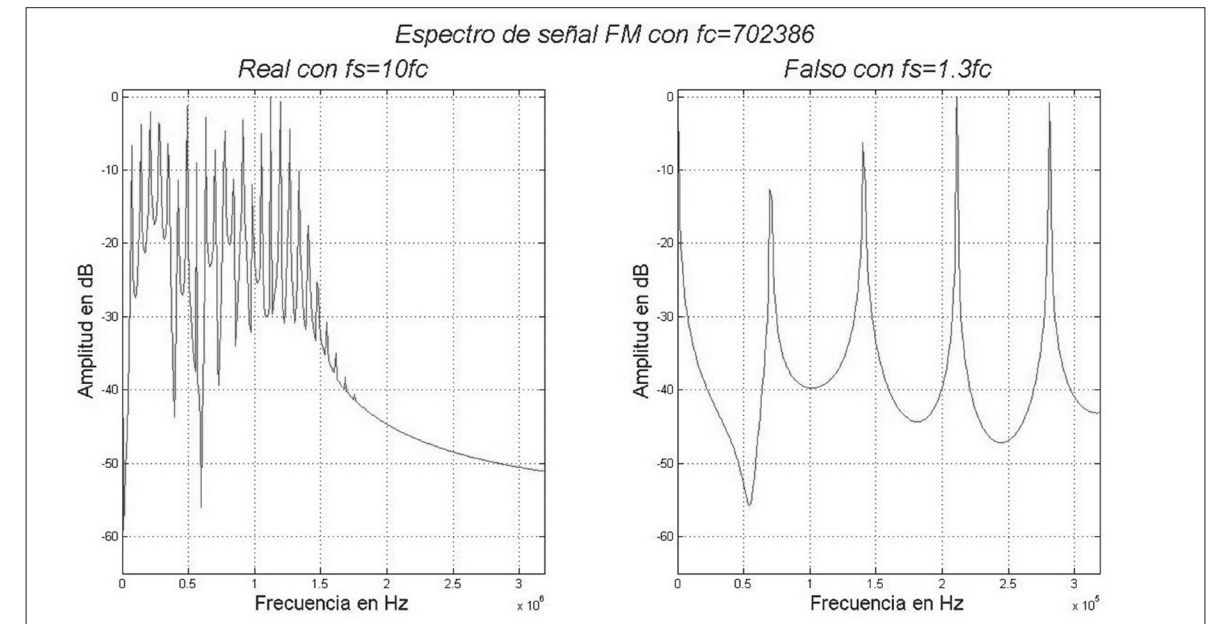


Figura 14. Espectros una señal FM obtenidos con dos tipos de muestreo. Izquierda, espectro real con $fs=10fc$ (muestreo Nyquist). Derecha espectro falso con $fs=1.3fc$ (muestreo sub-Nyquist).

Debido a los problemas relacionados con el fenómeno de *aliasing*, no es posible la caracterización de señales continuas muestreadas con frecuencias sub-Nyquist a través del análisis de Fourier (Hsu, 2000); por tal motivo, en las siguientes secciones se propone un método alternativo para la caracterización de señales continuas submuestreadas.

Valores singulares de muestras de señales continuas

Para la caracterización de señales con modulación continua propuesta en este artículo, es necesario identificar el comportamiento de los valores singulares de señales continuas; esto se realiza a través de las fases descritas a continuación:

Obtención de los valores singulares de la señal:

La obtención de las muestras de los diferentes tipos de señales (sección modelo de la señal) se realiza con una frecuencia sub-Nyquist (ecuación 9); esto se representa en la Figura 11.

Estas muestras conforman el vector base (ecuación 10) para la obtención de los valores singulares.

$$y[m] = x[m] + r[m] \quad m \text{ índice sub-Nyquist} \quad (10)$$

...donde $x[m]$ y $r[m]$, son las muestras de la señal y del ruido, respectivamente.

A partir del vector base (ecuación 10) se obtiene la matriz de autocorrelación (ecuación 11):

$$y[m] \rightarrow R_{yy} = R_{xx} + R_{rr} \quad (11)$$

... en la cual (ecuación 11), R_{xx} es la matriz de autocorrelación de la señal, mientras que R_{rr} es la matriz de autocorrelación producto del ruido.

Una de las características que presenta el ruido blanco aditivo gaussiano es que, al ser no correlacionado (Vaseghi, 2006) con la señal ni ser autocorrelacionado, los valores obtenidos en R_{rr} (ecuación 12) no son comparables con los obtenidos en la matriz R_{xx} ; es decir, que la matriz de autocorrelación de $y[m]$ presenta, principalmente, valores relacionados con la señal $x[m]$; de esta forma, la ecuación 11 puede aproximarse a la ecuación 12:

$$R_{rr} = \sigma^2 I \lll E\{xx^H\} \quad (12)$$

$$R_{yy} = E\{yy^H\} \approx E\{xx^H\} \quad (13)$$

Al aplicar el método de descomposición en valores singulares (ecuación 13) a la matriz de autocorrelación R_{yy} se obtiene los valores con los cuales se pretende caracterizar la señal $x[m]$.

$$R_{xx} = U\Sigma V^H \rightarrow \text{diag}(\Sigma) = \text{Valores Singulares} \quad (13)$$

En las Figuras 15 a 17 se presenta el comportamiento de los valores singulares obtenidos con 64 muestras de las señales analizadas.

Si se compara los valores singulares de las muestras sub-Nyquist (rojo) con las muestras adquiridas bajo el teorema de muestreo (verde) (Shannon, 1984), (Nyquist, 1928), se observa una diferencia notable entre sus máximos valores para una frecuencia de muestreo determinada (Guerrero, 2015) (Figuras 15 y 16).

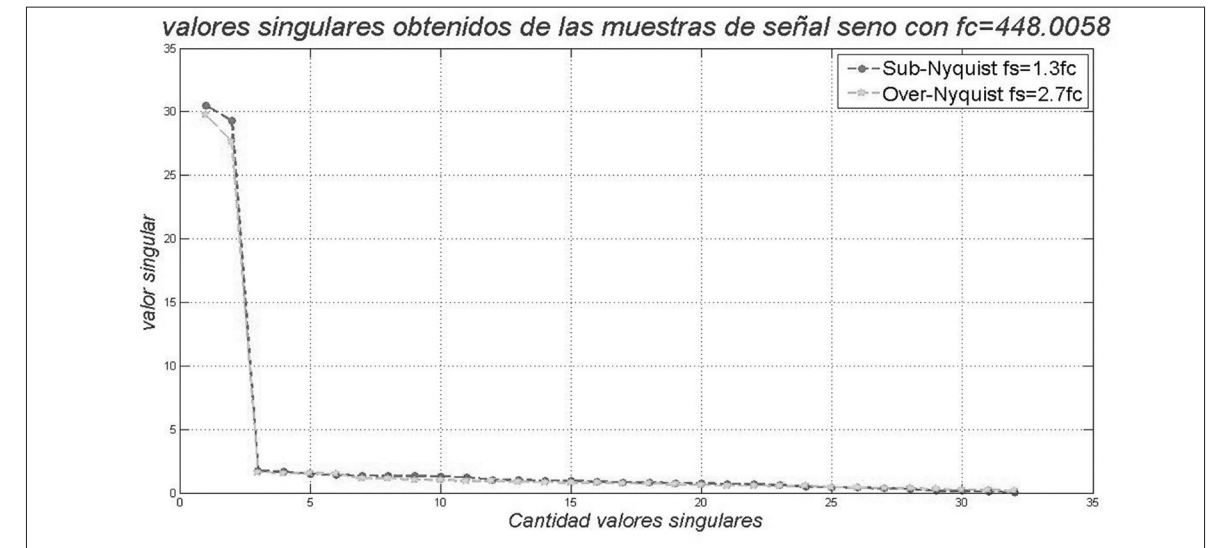


Figura 15. Valores singulares de una señal senoidal pura inmersa en AWGN, obtenidos a partir de 64 muestras adquiridas con frecuencias de muestreo sub-Nyquist= 1.3fc y over-Nyquist=2.7fc

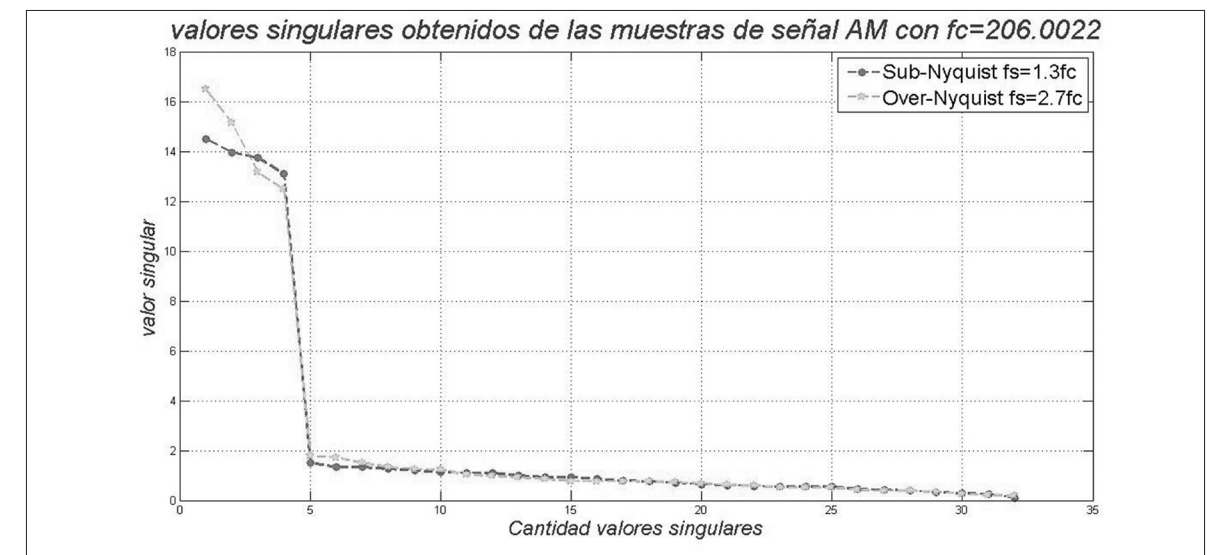


Figura 16. Valores singulares de una señal con modulación AM inmersa en AWGN, obtenidos a partir de 64 muestras adquiridas con frecuencias de muestreo sub-Nyquist= 1.3fc y over-Nyquist=2.7fc

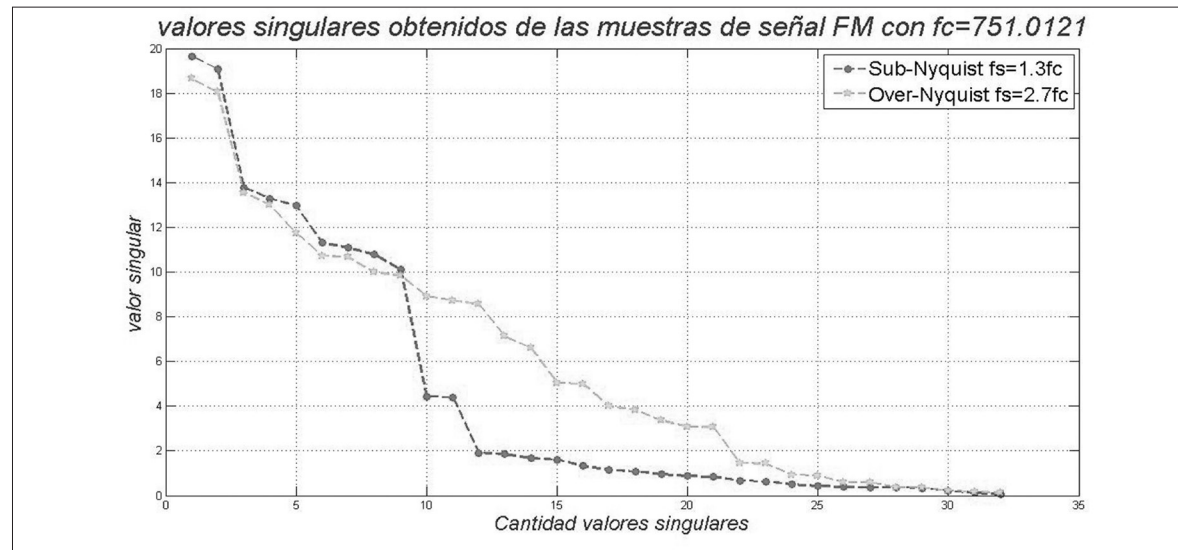


Figura 17. Valores singulares de una señal con modulación FM inmersa en AWGN, obtenidos a partir de 64 muestras adquiridas con frecuencias de muestreo sub-Nyquist= 1.3fc y over-Nyquist=2.7fc

Dicha diferencia permite distinguir la frecuencia central de una señal submuestreada sin caer en los errores provocados por el fenómeno de *aliasing* (Guerrero, 2015). Teniendo en cuenta esto, se procede a extraer el máximo valor singular (ecuación 14) para diferentes frecuencias de submuestreo del intervalo representado por la ecuación 15.

$$\lambda_1 = \max(\text{diag}(\Sigma)) \quad (14)$$

$$[f_c, 2f_c] \quad f_c = \text{f.central señal} \quad (15)$$

Distribución de los máximos valores singulares

Para observar el comportamiento de los máximos valores singulares se extrae dichos valores de diversas señales continuas con frecuencias centrales aleatorias (con distribución uniforme), submuestreadas con la misma relación de frecuencia f_s (ecuación 16); posteriormente se realiza el respectivo histograma (Figuras 18 a 20).

$$f_s = m f_c \quad 1 \leq m \leq 2 \quad (16)$$



Figura 18. Distribución de los valores singulares máximos para señales submuestreadas con fs=2fc.

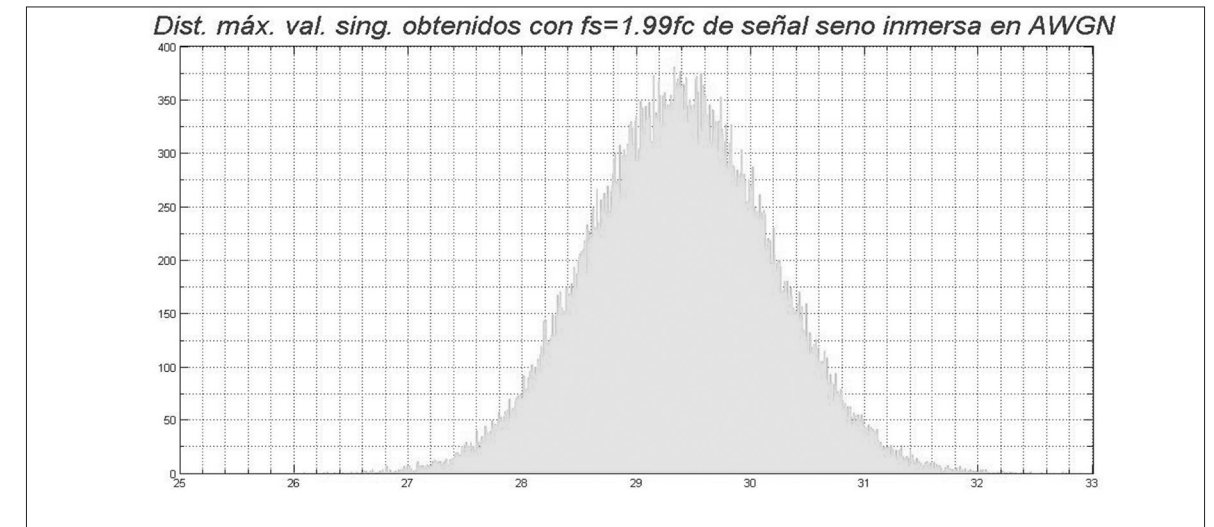


Figura 19. Distribución de los valores singulares máximos para señales submuestreadas con fs=1.99fc.

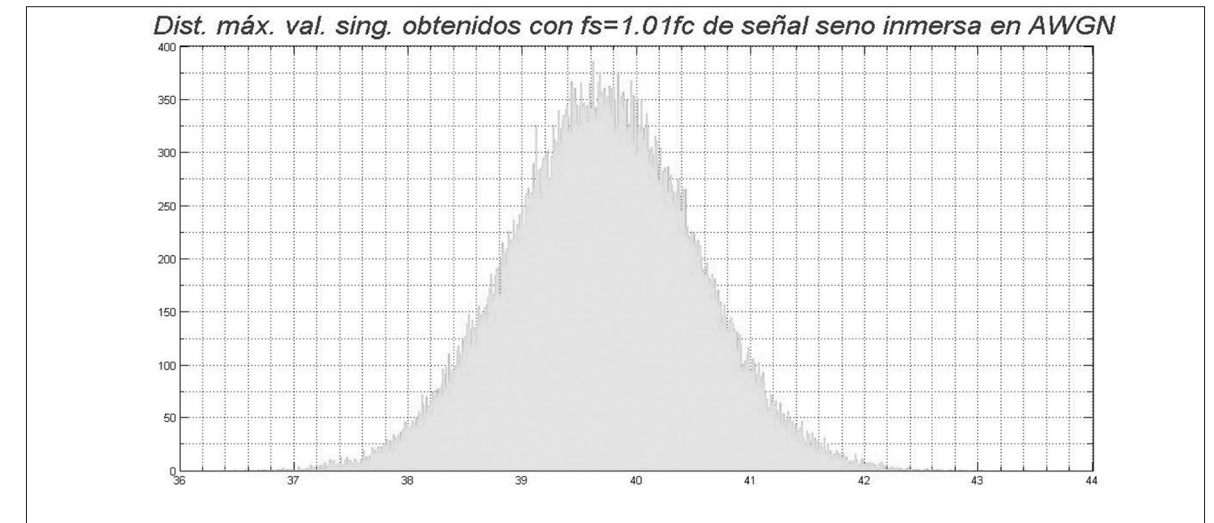


Figura 20. Distribución de los valores singulares máximos para señales submuestreadas con fs=1.01fc.

La distribución de los máximos valores singulares (M.V.S) para diferentes relaciones de frecuencia, presentan un comportamiento que puede aproximarse a una distribución normal descrita por su media y su varianza (ecuación 17).

$$M.V.S \sim N(\mu, \sigma) \quad (17)$$

... donde μ es la media y σ es la varianza. Esta aproximación es mostrada en la Figura 21.

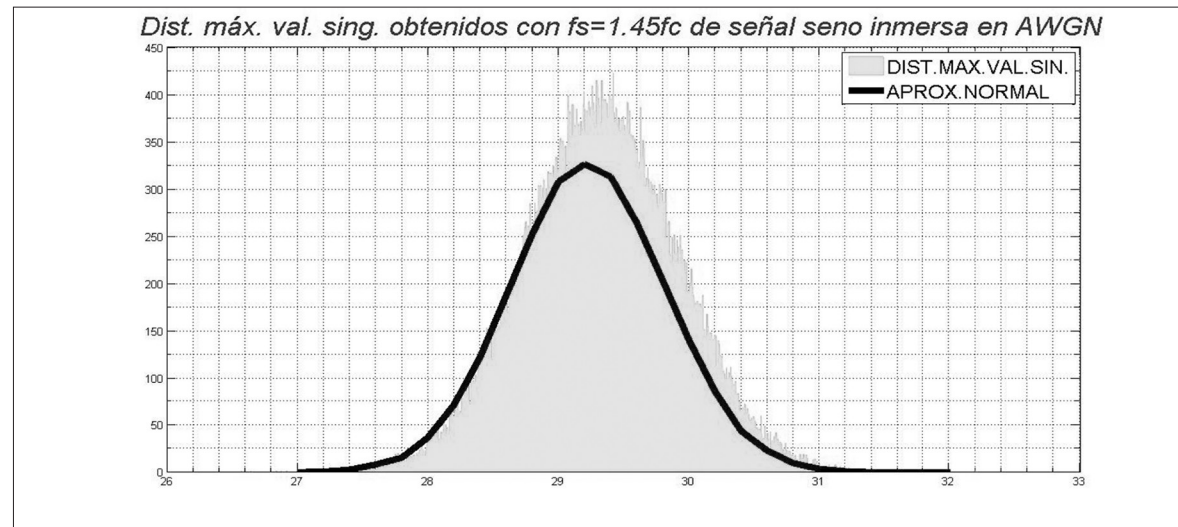


Figura 21. Aproximación de los máximos valores singulares a una distribución normal.

Teniendo en cuenta esta aproximación, la frecuencia central de cualquier señal continua submuestreada con una relación de f_s (ecuación 16) desconocida, puede ser calculada (de forma aproximada) (Guerrero, 2015) por el dato de la media (μ) de su distribución normal, lo cual se realiza a través de la ecuación 18.

$$\mu_i \rightarrow f_c \approx \frac{f_s}{(k - i)} \quad (18)$$

Curvas características de la media de los m. s. v.

La media (μ) de la distribución normal de los M.V.S. obtenidos a diferentes relaciones de f_s (ecuación 16), y reordenando la relación para obtener f_c (ecuación 19), permite caracterizar el comportamiento de dichos valores, ofreciendo como resultado, curvas características de los tres tipos de señales analizadas (sección modelo de la señal). Estas curvas son presentadas en las Figuras 22 a 24.

$$f_c = kf_c \quad 0.5 \leq k \leq 1 \quad (19)$$

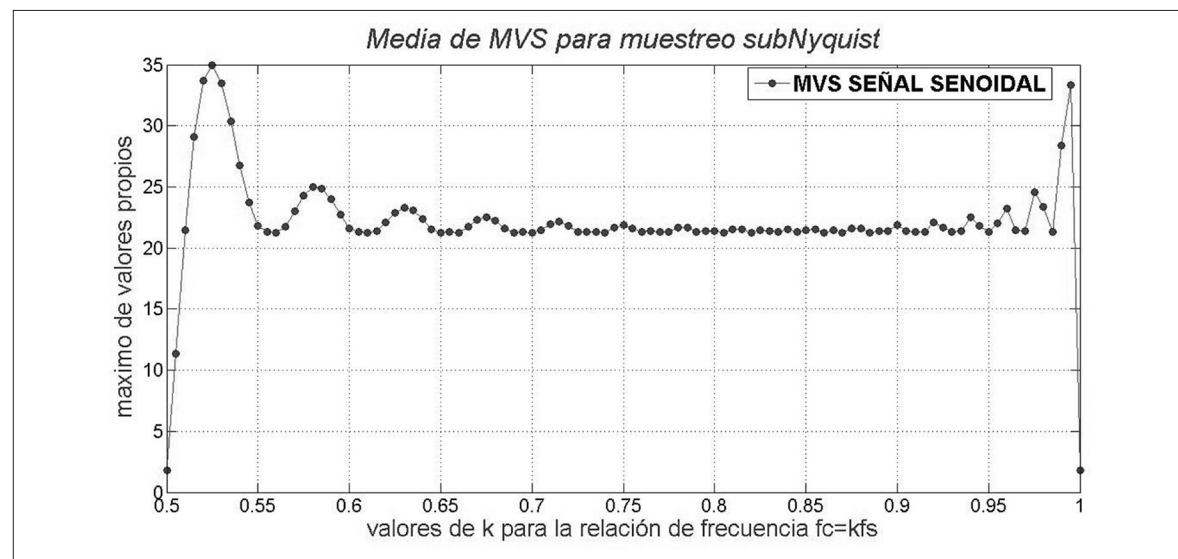


Figura 22. Curva característica de la media de los M.V.S. para tonos senoidales puros inmersos en ruido.

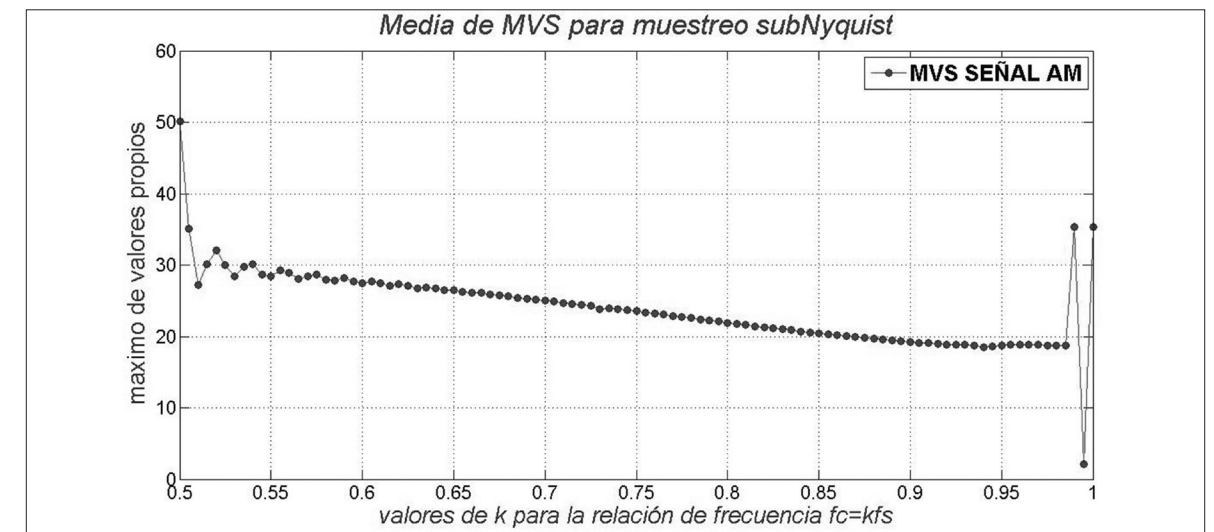


Figura 23. Curva característica de la media de los M.V.S. para señales con modulación AM inmersas en ruido.

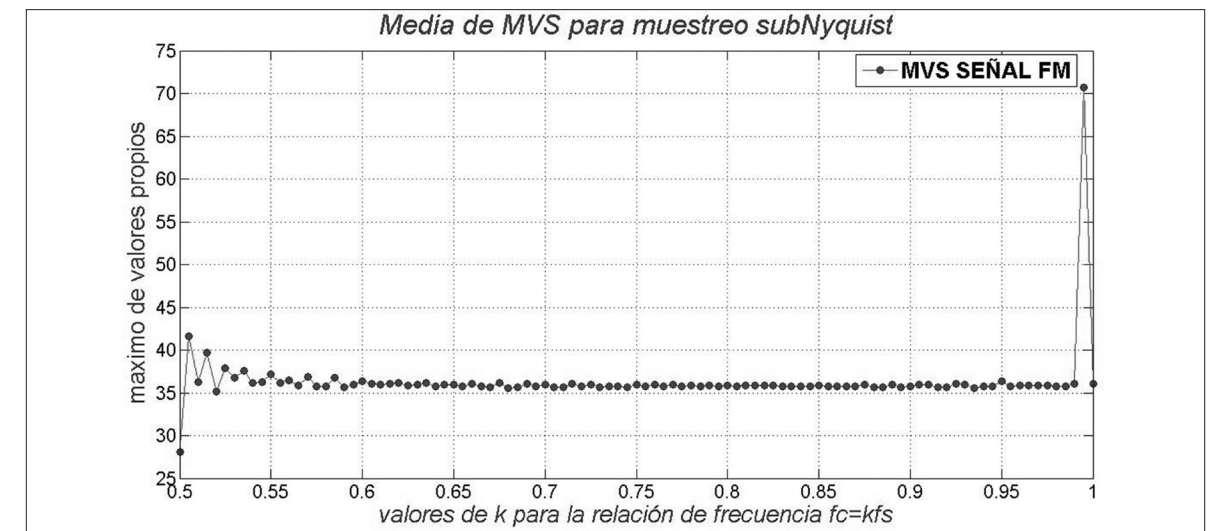


Figura 24. Curva característica de la media de los M.V.S. para señales con modulación FM inmersas en ruido.

4. Conclusiones

En este artículo se presenta resultados procedentes de un proceso experimental a nivel de simulación desarrollado en Matlab®. A partir de los datos obtenidos se evidencia lo siguiente:

- Existe una diferencia significativa entre los máximos valores singulares obtenidos de muestras subNyquist y aquellas que obedecen al teorema de muestreo, la cual se convierte en un punto clave para diferenciar señales submuestreadas.

- El número de muestras y la frecuencia de muestreo son dos factores que influyen directamente en el comportamiento de los valores singulares de la señal.
- Al estimar la matriz de autocorrelación del vector de muestras de una señal inmersa en ruido aditivo blanco gaussiano se obtiene resultados muy cercanos a aquellos provenientes de muestras de señales sin ruido, trabajando en el sub-espacio de la señal.
- Los máximos valores singulares presentan un comportamiento aproximado a una distribución de

probabilidad normal, que permite describirlos por su valor de media.

- La media de los máximos valores singulares varía de acuerdo con el valor de frecuencia de submuestreo.
- Es posible obtener curvas que describan el comportamiento de la media de los máximos valores singulares en función de la frecuencia de submuestreo.
- Cada tipo de señal analizada presenta una curva única de comportamiento de los máximos valores singulares.

6. Conflicto de intereses

Los autores de este artículo declaran no tener ningún tipo de conflicto de intereses del trabajo presentado.

Referencias

- Bracewell, R. (2000). *The Fourier Transform and its applications*. New York: McGraw Hill Book Company.
- Guerrero, H. (2015). *Sensado de Espectro de Banda Ancha Basado en la Distribución de los Valores Propios y/o Valores Singulares de la Señal Recibida Utilizando Muestreo Sub-Nyquist (MSc Tesis en desarrollo)*. Popayán, Cauca: Universidad del Cauca.
- Hattab, G. & Ibnkahla, M. (2014). Multiband Spectrum Access: Great Promises for Future Cognitive Radio Networks. *Proceedings of the IEEE* 102(3), 282-306.
- Hsu, H. (2000). *Análisis de Fourier*. México: S.A. Alhambra Mexicana.
- Moron, J. (2011). *Señales y Sistemas*. Maracaibo, Venezuela: Fondo Editorial Biblioteca Universidad Rafael Urdaneta.
- Nyquist, H. (1928). Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 47(2), 617-644.
- Shannon, C. (1984). Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IEEE* 86(2), 1192-1201.
- Subhedar, M. & Birajdar, G. (2011). Spectrum Sensing Techniques in Cognitive Radio Networks: A survey. *International Journal of Next-Generation Networks (IJNGN)* 3(2), 37-51.
- Tomasi, W. (2003). *Sistemas de comunicaciones electrónicas* (4^a ed.). México: Pearson Educación.

Vaseghi, S. (2006). *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction* (3rd ed.). England: John Wiley & Sons Ltd.

UNIMAR